موقع عيون البصائر التعليمي

سنة ثالثة ثانوي
الشعب:
علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي

إمتحان بكالوريا تجريبية 2022 شعبة علوم تجريبية

إعداد الأستاذ:
قويسم إبراهيم الخليل

تاريخ النشر:
[17 ماي 2022]

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للإمتحانات والمسابقات

إمتحان بكالوريا تجريبي

ثانوية: صديقي النوري – الجلفة

دورة: 2022

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 03 ساعات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (03 نقاط)

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية، اقترحت ثلاث إجابات، واحدة فقط منها صحيحة، حدّدها مع التعليل

❶ حلول للمعادلة التفاضلية $y - y' = 1$ التي تحقق $y(0) = e$ هي:

أ/ $y = e^{x+1}$ ب/ $y = e^{x+1} - e^{x} + 1$ ج/ $y = e^{x+1} + 1$

❷ قيمة التكامل A حيث: $A = \int_{-1}^{1} xe^{x}dx$ هي:

أ/ $A = 2e^{-1}$ ب/ $A = 2e$ ج/ $A = 2 + e$

❸ حلول المعادلة: $e^{x} - \sqrt{e^{x-1}} = 0$ هي:

أ/ $S \in \{-1; 1\}$ ب/ $S \in \{0\}$ ج/ $S \in \{-1\}$

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

يحتوي صندوق على ثلاث كرات حمراء مرقمة بـ $1-$، 1، 2 وخمس كرات بيضاء مرقمة بـ 1، 1، 1، 2، 2 وكرتان خضراوان مرقمتان بـ $1-$ ، $1-$ (كل الكرات لا نميز بينها عند اللمس)

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات

نعتبر الحوادث التالية:

A: "الكرات المسحوبة مختلفة اللون مثنى مثنى"

B: "يوجد على الأقل كرة خضراء واحدة"

C: "الكرات المسحوبة مجموع أرقامها معدوم"

❶ احسب احتمال الحوادث A، B و C

❷ علما أنّ مجموع أرقام الكريات المسحوبة معدوم، ما احتمال أن تكون مختلفة في اللون مثنى مثنى

❸ ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد ألوان الكرات المسحوبة

أ/ بيّن أنّ $p(X=2)=\frac{79}{120}$ ، ثم أكتب قانون احتمال المتغير العشوائي X

ب/ احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ ثم احسب الاحتمال $P(X^2 - 2X \geq 3)$

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 3$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 8\left(1 - \dfrac{3}{u_n + 2}\right)$

❶ برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا: $2 < u_n < 4$

❷ بيّن أنّ (u_n) متزايدة تماما، ثمّ استنتج أنها متقاربة

❸ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $4 - u_{n+1} \le \dfrac{4}{5}(4 - u_n)$

❹ استنتج أنّ $0 < 4 - u_n \le \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$، ثمّ احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n)$

❺ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 2}$

أ/ بيّن أنّ (v_n) هندسية محددا أساسها وحدها الأول

ب/ اكتب عبارة v_n بدلالة n، ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n

ج/ اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I) الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = -1 + x + 2\ln x$

❶ ادرس اتجاه تغير الدالة g

❷ احسب $g(1)$، ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0; +\infty[$

II) الدالة العددية f معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{-1 + (x-2)\ln x}{x}$ ، و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول $1cm$)

❶ احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$، وفسر النتيجة هندسيا، ثمّ احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

❷ أ/ بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ لدينا: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

ب/ عيّن اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

❸ ليكن (Γ) المنحنى البياني الممثل للدالة: $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$

أ/ احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \ln x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Γ)

❹ بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β، ثم تحقق أنّ:

$0.5 < \alpha < 0.6$ و $2.9 < \beta < 3$

❺ ارسم (Γ) ثم (C_f)

❻ احسب A مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و (Γ) والمستقيمان ذو المعادلتان $x = 1$ و $x = e$

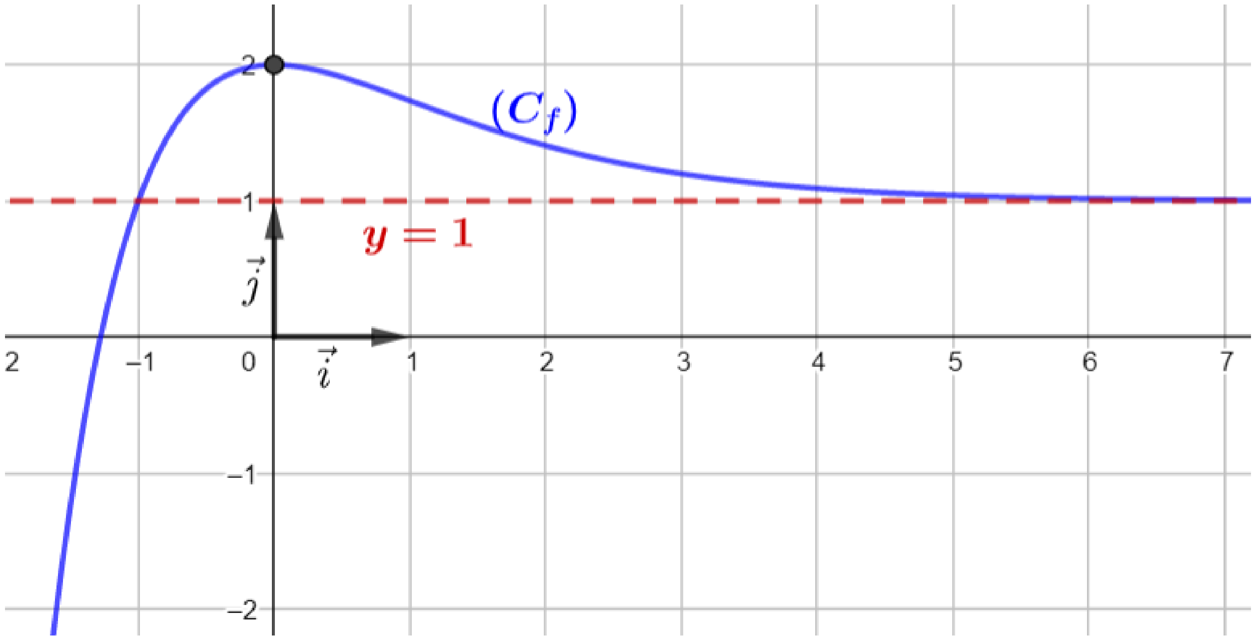
انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (03 نقاط)

I) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = (ax+b)e^{-x} + c$ حيث a، b و c أعداد حقيقية

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $1cm$)



- بقراءة بيانية، عيّن a، b و c

II) نضع: $a = b = c = 1$

❶ باستعمال المكاملة بالتجزئة، عيّن دالة أصلية للدالة $x \mapsto (x+1)e^{-x}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل -1

❷ بيّن أن $A = (e-1)cm^2$ حيث A هي مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين ذو المعادلتين $x = -1$ و $x = 0$

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

صندوق به ثلاث كريات حمراء وأربع كريات بيضاء و كريتين خضراوين

نسحب عشوائيا كريتان على التوالي بدون إرجاع

نعتبر الحوادث التالية: A: "الكرتان المسحوبتان من نفس اللون"

B: "سحب كرية بيضاء في المرة الأولى"

❶ احسب احتمال الحوادث A و B

❷ استنتج احتمال سحب كريتين من لونين مختلفين

❸ علما أنّ الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء، احسب احتمال سحب كرتان من نفس اللون

❹ ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الكرات البيضاء المسحوبة

أ/ عيّن قيم المتغير العشوائي X، ثم أكتب قانون احتماله

ب/ احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ ثم احسب $E(1443X + 2022)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I) لتكن الدالة f المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-1}$

❶ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

❷ بيّن أنه من أجل كل $x \geq 1$ فإنّ: $f(x) \geq 1$

II) لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 2$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$

❶ برهن بالتراجع أنه من أجل كل n طبيعي فإنّ: $u_n \geq 1$

❷ بيّن أنّ (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة

❸ نضع من أجل كل n طبيعي: $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$ و $w_n = \ln(v_n)$

أ/ بيّن أن (w_n) هندسية أساسها 2 واحسب w_0

ب/ اكتب بدلالة n عبارة w_n ، ثم استنتج بدلالة n عبارة v_n

❹ استنتج عبارة u_n بدلالة n، ثم احسب نهاية (u_n)

❺ أ/ اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$

ب/ اكتب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$

التمرين الرابع: (7.5 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (1-x)e^{2-x} + 1$

❶ ادرس اتجاه تغير الدالة g، ثمّ شكل جدول تغيراتها

❷ بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإنّ $g(x) \geq 0$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x - 2 + xe^{2-x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (وحدة الطول هي $1cm$)

❶ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

❷ أ/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x-2)]$ ، ماذا تستنتج؟

ب/ ادرس الوضع النسبي بين (C_f) والمستقيم (Δ) حيث $(\Delta): y = x - 2$

❸ أ/ بيّن أنه من اجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا: $f'(x) = g(x)$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

❹ بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0.31; 0.32[$

❺ بيّن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثييها

❻ بيّن أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) يطلب تعيين معادلة له

❼ ارسم (T)، (Δ) و (C_f)

❽ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$

انتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للإمتحانات والمسابقات

إمتحان بكالوريا تجريبي

ثانوية: صديقي النوري – الجلفة

دورة: 2022

الشعبة: علوم تجريبية

تصحيح مقترح لاختبار مادة الرياضيات

الموضوع الأول

◆ التمرين الأول: (03 نقاط)

[01ن] ❶ حلول للمعادلة التفاضلية $y - y' = 1$ التي تحقق $y(0) = e$ هي: $\boxed{y = e^{x+1} - e^x + 1}$

التبرير:

لدينا:

$$y - y' = 1 \Rightarrow y' = y - 1 \Rightarrow y = Ce^x - \frac{-1}{1} \Rightarrow Ce^x + 1$$

ولدينا:

$$y(0) = e \Rightarrow Ce^0 + 1 = e \Rightarrow C = e - 1$$

ومنه:

$$y = (e-1)e^x + 1 \Rightarrow y = e^{x+1} - e^x + 1$$

[01ن] ❷ التكامل A حيث: $A = \int_{-1}^{1}(xe^x)dx$ هي: $\boxed{A = 2e^{-1}}$

التبرير:

$$A = \int_{-1}^{1}(xe^x)dx$$

نضع: $u(x) = x$ و $v'(x) = e^x$

ومنه: $u'(x) = 1$ و $v(x) = e^x$

إذن:

$$A = \int_{-1}^{1}(xe^x)dx = [xe^x]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x dx = [xe^x - e^x]_{-1}^{1} = 2e^{-1}$$

[01ن] ❸ حلول المعادلة: $e^x - \sqrt{e^{x-1}} = 0$ هي: $\boxed{S \in \{-1\}}$

التبرير:

$$e^x - \sqrt{e^{x-1}} = 0 \Rightarrow e^x = \sqrt{e^{x-1}} \Rightarrow e^{2x} = e^{x-1} \Rightarrow 2x = x - 1 \Rightarrow x = -1$$

◆ التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

[1.5ن] ❶ حساب احتمال الحوادث A، B و C:

$$p(A) = \frac{C_3^1 C_5^1 C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{3 \times 5 \times 2}{120} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$p(B) = \frac{C_2^1 C_8^2 + C_2^2 C_8^1}{C_{10}^3} = \frac{2 \times 28 + 1 \times 8}{120} = \boxed{\frac{8}{15}}$$

$$p(C)=\frac{C_3^2C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{3\times3}{120}=\boxed{\frac{3}{40}}$$

[0.5ن] ❷ حساب احتمال أن تكون مختلفة في اللون مثنى مثنى علما أنّ مجموع أرقامها معدوم:

$$p_C(A)=\frac{p(A\cap C)}{p(C)}=\frac{\frac{C_2^1C_2^1C_1^1}{C_{10}^3}}{\frac{3}{40}}=\frac{\frac{2\times2\times1}{120}}{\frac{3}{40}}=\boxed{\frac{4}{9}}$$

[0.5ن] ❸ أ/ تبيين أنّ $p(X=2)=\frac{79}{120}$:

$$p(X=2)=\frac{C_3^2C_7^1+C_5^2C_5^1+C_2^2C_8^1}{C_{10}^3}=\boxed{\frac{79}{120}}$$

[01ن] - كتابة قانون احتمال X:

لدينا: $X(\Omega)=\{1;2;3\}$ حيث:

$$p(X=1)=\frac{C_3^3+C_5^3}{C_{10}^3}=\boxed{\frac{11}{120}}$$

$$p(X=2)=\boxed{\frac{79}{120}}$$

$$p(X=3)=\frac{C_3^1C_5^1C_2^1}{C_{10}^3}=\boxed{\frac{30}{120}}$$

ومنه:

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{11}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{30}{120}$

[0.5ن] ب/ حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$$E(X)=1\frac{11}{179}+2\frac{79}{120}+3\frac{30}{120}=\boxed{\frac{259}{120}}$$

[0.5ن] • حساب $P(X^2-2X\geq3)$

$$P(X^2-2X\geq3)=P(X^2-2X-3\geq0)=P\big((X+1)(X-3)\geq0\big)$$

لدينا:

X	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$(X+1)(X-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن:

$$P(X^2-2X\geq3)=P(X=3)=\boxed{\frac{30}{120}}$$

◆ التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

[0.5ن] ❶ برهان بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ لدينا: $2<u_n\leq4$:

نسمي الخاصية $P(n)$ ... $2<u_n<4$

• لدينا: $2<u_0<4$ ومنه: $2<3<4$ إذن القضية $P(n)$ محققة من أجل $n=0$

• نفرض أنّ: $2<u_n<4$ ونثبت أنّ $2<u_{n+1}<4$

• لدينا:

$$2<u_n<4\Rightarrow4<u_n+2<6\Rightarrow\frac{1}{6}\leq\frac{1}{u_n+2}<\frac{1}{4}\Rightarrow-\frac{3}{4}<-\frac{3}{u_n+2}<-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} < 1 - \frac{3}{u_n + 2} < \frac{1}{2} \Rightarrow 2 < 8\left(1 - \frac{3}{u_n + 2}\right) < 4 \Rightarrow 2 < u_{n+1} < 4$$

حسب مبدأ البرهان بالتراجع $P(n)$ محققة

[0.5ن] ❷ تبيين أنّ (u_n) متزايدة تماما ، ثمّ استنتاج أنها متقاربة:

$$u_{n+1} - u_n = 8\left(1 - \frac{3}{u_n + 2}\right) - u_n = \frac{-(u_n)^2 + 6u_n - 8}{u_n + 2} = \frac{-(u_n - 2)(u_n - 4)}{u_n + 2}$$

لدينا: $2 < u_n < 4$ **ومنه:** $0 < u_n - 2 < 2$

لدينا: $2 < u_n < 4$ **ومنه:** $-2 < u_n - 4 < 0$

لدينا: $2 < u_n < 4$ **ومنه:** $4 < u_n + 2 < 6$

إذن: $\frac{-(u_n - 2)(u_n - 4)}{u_n + 2} > 0$ **وعليه** (u_n) **متزايدة تماما**

• **وبما أنّ** (u_n) **متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ 4 فهي متقاربة**

[0.5ن] ❸ تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$:

لدينا:

$$4 - u_{n+1} = 4 - 8\left(1 - \frac{3}{u_n + 2}\right) \Rightarrow 4 - u_{n+1} = \frac{4(4 - u_n)}{u_n + 2}$$

ولدينا: (u_n) **متزايدة ولدينا** $u_0 = 3$ **ومنه:**

$$u_n \geq 3 \Rightarrow u_n + 2 \geq 5 \Rightarrow \frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{4(4 - u_n)}{u_n + 2} \leq \frac{4(4 - u_n)}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)}$$

[0.5ن] ❹ استنتاج أنّ $0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$:

لدينا: $4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$ **ومنه:**

$$\begin{cases} 4 - u_1 \leq \frac{4}{5}(4 - u_0) \\ 4 - u_2 \leq \frac{4}{5}(4 - u_1) \\ \vdots \\ 4 - u_n \leq \frac{4}{5}(4 - u_{n-1}) \end{cases}$$

بالضرب طرفا لطرف نجد:

$$(4 - u_1) \times (4 - u_2) \times \ldots \times (4 - u_n) \leq \frac{4}{5}(4 - u_0)\frac{4}{5}(4 - u_1) \times \ldots \times \frac{4}{5}(4 - u_{n-1})$$

ومنه:

$$4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n (4 - u_0) \Rightarrow 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \ldots (*)$$

ولدينا:

$$u_n < 4 \Rightarrow -4 < -u_n \Rightarrow 0 < 4 - u_n \ldots (**)$$

من $(*)$ **و** $(**)$ **نجد أنّ:**

$$\boxed{0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n}$$

[0.5ن] • حساب $\lim_{n\to+\infty} (u_n)$:

$$0 < 4 - u_n \le \left(\frac{4}{5}\right)^n \Rightarrow 0 < \lim_{n\to+\infty} (4 - u_n) \le \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$$
$$\Rightarrow 0 < \lim_{n\to+\infty} (4 - u_n) \le 0$$

حسب مبدأ النهايات بالحصر نجد أنّ: $\lim_{n\to+\infty} (4 - u_n) = 0$

ومنه: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} (u_n) = 4}$

5

[0.5ن] أ/ تبيين أنّ (v_n) هندسية محددا أساسها وحدها الأول:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 4}{u_{n+1} - 2} = \frac{8\left(1 - \frac{3}{u_n + 2}\right) - 4}{8\left(1 - \frac{3}{u_n + 2}\right) - 2} = \frac{4u_n - 16}{6u_n - 12} = \frac{4(u_n - 4)}{6(u_n - 2)} = \frac{2}{3} v_n$$

ولدينا:

$$v_0 = \frac{u_0 - 4}{u_0 - 2} = -1$$

[0.5ن] ب/ كتابة عبارة v_n بدلالة n:

$$v_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

[0.5ن] - استنتاج عبارة u_n بدلالة n:

$$v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2} \Rightarrow v_n u_n - 2v_n - u_n = -4 \Rightarrow u_n(v_n - 1) = -4 + 2v_n$$

$$\Rightarrow u_n = 2\frac{v_n - 2}{v_n - 1} \Rightarrow \boxed{u_n = 2\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 2}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}}$$

[0.5ن] ج/ اكتب بدلالة n المجموع S_n

$$u_n = 2\frac{v_n - 2}{v_n - 1} = 2\frac{v_n - 1 - 1}{v_n - 1} = 2\left(1 - \frac{1}{v_n - 1}\right)$$

ومنه:

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n = -\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = \boxed{3\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1\right)}$$

◆ التمرين الرابع: (08 نقاط)

(I

[0.5ن] 1 دراسة اتجاه تغير الدالة g:

$$g'(x) = 1 + 2\frac{1}{x} = \frac{x + 2}{x}$$

لدينا: $g'(x) > 0$ لما $x \in \mathbb{R}_+^*$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+^*$

[0.25ن] 2 حساب $g(1)$:

$$g(1) = -1 + 1 + 2\ln 1 = 0$$

[0.5ن] - استنتاج إشارة $g(x)$:

بما أن الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]0; +\infty[$ ، و $g(1) = 0$ فإنّ:

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II

[0.5ن] ❶ أ/ حساب $\lim_{x \to 0^{>}} f(x)$:

$$\lim_{x \to 0^{>}} f(x) = \lim_{x \to 0^{>}} \left(\frac{-1 + \overbrace{x \ln x}^{0} - 2\ln x}{x} \right) = +\infty$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 0$

[0.5ن] ب/ حساب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x} + \ln x - 2\frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

[0.75ن] ❷ أ/ تبيين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{\left(\ln x + \frac{x-2}{x}\right) x - (-1 + (x-2)\ln x)}{x^2} = \frac{x - 1 + 2\ln x}{x^2} = \boxed{\frac{g(x)}{x^2}}$$

[0.75ن] ب/ تعيين اتجاه تغير الدالة f ، وتشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

- جدول تغيرات الدالة f:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-1	↗ $+\infty$

[0.75ن] ❸ أ/ حساب $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - \ln x)$:

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - \ln x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-1 + (x-2)\ln x}{x} - \ln x \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x} + \ln x - 2\frac{\ln x}{x} - \ln x \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x} - 2\frac{\ln x}{x} \right) = 0$$

- التفسير الهندسي: (C_f) و (Γ) متقاربان بجوار $+\infty$

[0.5ن] ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Γ):

$$f(x) - \ln x = 0 \Longrightarrow -\frac{1}{x} - \frac{2\ln x}{x} = 0 \Longrightarrow -1 - 2\ln x = 0$$

$$\Longrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Longrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$$

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f(x) - \ln x$	$+$	0	$-$

- (C_f) فوق (Γ) لما $x \in \left]0; e^{-\frac{1}{2}}\right[$
- (C_f) يقطع (Γ) لما $x = e^{-\frac{1}{2}}$
- (C_f) تحت (Γ) لما $x \in \left]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty\right[$

[01ن] ❹ تبيين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين:

من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أنّ (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين

- التحقق أنّ: $0.5 < \alpha < 0.6$ و $2.9 < \beta < 3$:

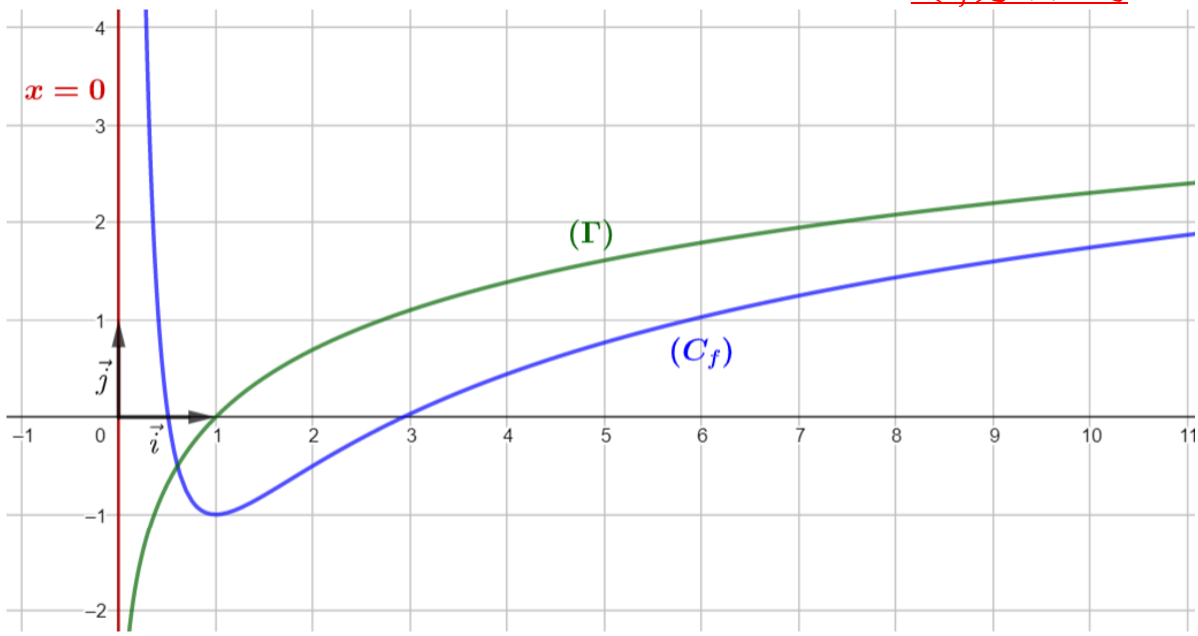
• لدينا: $f(0.6) \times f(0.5) < 0$ لأن: $f(0.6) \approx -0.47$ و $f(0.5) \approx 0.08$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0.5; 0.6[$

• ولدينا: $f(2.9) \times f(3) < 0$ لأن: $f(3) \approx 0.03$ و $f(2.9) \approx -0.01$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]2.9; 3[$

[01ن] ❺ رسم (Γ) و (C_f) :



[01ن] ❻ حساب A:

$$A = \int_1^e (\ln x - f(x))dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x}\ln x\right) dx = \left[\ln x + 2\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e$$

$$= [\ln x + (\ln x)^2]_1^e = \boxed{2} cm^2$$

بالتوفيق في شهادة البكالوريا

❤ لا تنسونا من صالح دعائكم ❤

الأستاذ: قويسم براهيم الخليل

الموضوع الثاني

◆ التمرين الأول: (03 نقاط)

[1.5ن] I) تعيين a، b و c

من البيان نجد:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 \\ f(0) = 2 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

• لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\big((ax+b)e^{-x}+c\big) = 1 \Longrightarrow \boxed{c=1}$$

•ولدينا:

$$f(0) = 0 \Longrightarrow (a(0)+b)e^{-(0)} + c = 2 \Longrightarrow b + c = 2 \Longrightarrow \boxed{b=1}$$

• ولدينا:

$$f'(x) = ae^{-x} - (ax+b)e^{-x} = (a-b-ax)e^{-x}$$

ومنه:

$$f'(0) = 0 \Longrightarrow \big(a-b-a(0)\big)e^{-(0)} = 0 \Longrightarrow a-b=0 \Longrightarrow a=b \Longrightarrow \boxed{a=1}$$

II)

[01ن] ❶ تعيين دالة أصلية للدالة f:

نسمي: $g(x) = (x+1)e^{-x}$

نضع: $u(x) = t+1$ و $v'(t) = e^{-t}$

ومنه: $u'(t) = 1$ و $v(t) = -e^{-t}$

إذن:

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-1}^{x}(t+1)e^{-t}dt = [-(t+1)e^{-t}]_{-1}^{x} - \int_{-1}^{x} -e^{-t}dt \\ &= [-(t+1)e^{-t}]_{-1}^{x} - [e^{-t}]_{-1}^{x} = [-(t+2)e^{-t}]_{-1}^{x} = \boxed{-(x+2)e^{-x}+e} \end{aligned}$$

[0.5ن] ❷ تبيين أن $A = e-2$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0}\big((x+1)e^{-x}+1\big)dx = \int_{-1}^{0}(x+1)e^{-x}dx + \int_{-1}^{0}dx \\ &= [-(x+2)e^{-x}]_{-1}^{0} + [x]_{-1}^{0} = [-(x+2)e^{-x}+x]_{-1}^{0} \\ &= \boxed{(e-1)}\, cm^2 \end{aligned}$$

◆ التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

[01ن] ❶ حساب احتمال الحوادث A و B:

$$p(A) = \frac{A_3^2 + A_4^2 + A_2^2}{A_9^2} = \boxed{\frac{20}{72}} = \frac{5}{18}$$

$$p(B) = \frac{A_4^1 A_8^1}{A_9^2} = \boxed{\frac{32}{72}} = \frac{4}{9}$$

[0.5ن] ❷ استنتاج احتمال سحب كريتين من لونين مختلفين:

$$p(C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{20}{72} = \boxed{\frac{52}{72}} = \frac{13}{18}$$

[0.5ن] ❸ حساب احتمال سحب كرتان من نفس اللون علما أنّ الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء:

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{A_4^2}{A_9^2}}{\frac{32}{72}} = \frac{\frac{12}{72}}{\frac{32}{72}} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

❹

[1.5ن] أ/ تعيين قيم المتغير العشوائي X، وكتابة قانون احتماله:

لدينا: $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$ حيث:

$$p(X=0) = \frac{A_5^2}{A_9^2} = \boxed{\frac{20}{72}} = \frac{5}{18}$$

$$p(X=1) = \frac{2A_4^1A_5^1}{A_9^2} = \boxed{\frac{40}{72}} = \frac{5}{9}$$

$$p(X=2) = \frac{A_4^2}{A_9^2} = \boxed{\frac{12}{72}} = \frac{1}{6}$$

ومنه:

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{20}{72}$	$\frac{40}{72}$	$\frac{12}{72}$

[0.5ن] ب/ حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$$E(X) = 0\frac{20}{72} + 1\frac{40}{72} + 2\frac{12}{72} = \frac{8}{9}$$

[0.5ن] • حساب $E(1443X + 2022)$:

$$E(1443X + 2022) = 1443E(X) + 2022 = \boxed{\frac{9914}{3}}$$

◆ التمرين الثالث: (05 نقاط)

I)

[0.5ن] ❶ دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

$$f'(x) = \frac{2x(2x-1) - 2x^2}{(2x-1)^2} = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2} > 0$$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $[1; +\infty[$

x	1 $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$

[0.25ن] ❷ تبيين أنه من أجل كل $x \geq 1$ فإنّ: $f(x) \geq 1$:

من جدول تغيرات الدالة f نجد أنّ $f(x) \geq 1$

II)

[0.5ن] ❶ برهان بالتراجع أنه من أجل كل طبيعي n فإنّ: $u_n \geq 1$:

نسمي $u_n \geq 1 \; ... \; P(n)$

• لدينا: $u_0 \geq 1$ ومنه: $2 \geq 1$ إذن $P(n)$ صحيحة من أجل $n = 0$

• نفرض أن $u_n \geq 1$ ونثبت صحة $u_{n+1} \geq 1$

• لدينا: $u_n \geq 1$

وبما أنّ الدالة f متزايدة تماما على $[1;+\infty[$ فإنّ:

$$u_n \geq 1 \Rightarrow f(u_n) \geq f(1) \Rightarrow u_{n+1} \geq 1$$

حسب البرهان بالتراجع $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

❷ تبيين أنّ (u_n) متناقصة تماما، واستنتاج أنها متقاربة: [0.5ن]

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n)^2}{2u_n - 1} - u_n = \frac{-(u_n)^2 + u_n}{2u_n - 1} = \frac{u_n(1-u_n)}{2u_n - 1}$$

لدينا: $u_n \geq 1$ ومنه: $1 - u_n \leq 0$

ولدينا: $u_n \geq 1$ ومنه: $2u_n - 1 \geq 1$

إذن:

$$\frac{u_n(1-u_n)}{2u_n - 1} < 0$$

وعليه (u_n) متناقصة تماما

• وبما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـ 1 فهي متقاربة

❸

أ/ تبيين أن (w_n) هندسية أساسها 2 وحساب w_0: [0.5ن]

$$w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln\left(\frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{(u_n)^2}{2u_n - 1} - 1}{\frac{(u_n)^2}{2u_n - 1}}\right) = \ln\left(\frac{(u_n)^2 - 2u_n + 1}{(u_n)^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(u_n - 1)^2}{(u_n)^2}\right) = 2\ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right) = 2\ln(v_n) = 2w_n$$

ولدينا: $w_0 = \ln(v_0) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

إذن (v_n) هندسية أساسها 2 وحدها الأول $-\ln 2$

ب/ كتابة بدلالة n عبارة w_n : [0.5ن]

$$w_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \times (2)^n = \boxed{\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)}$$

• استنتاج بدلالة n عبارة v_n: [0.5ن]

$$w_n = \ln(v_n) \Rightarrow e^{w_n} = v_n \Rightarrow v_n = e^{\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)} \Rightarrow \boxed{v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$$

❹ استنتاج عبارة u_n بدلالة n: [0.5ن]

لدينا:

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \Rightarrow v_n u_n = u_n - 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{1 - v_n} \Rightarrow \boxed{u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}}$$

• حساب نهاية (u_n): [0.5ن]

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}\right) = \boxed{1}$$

لأنّ: $\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)=0$ ، $\left(-1<\frac{1}{2}<1\right)$

5

أ/ كتابة بدلالة n المجموع S_n : [0.5ن]

$$S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right) = \boxed{\ln(2)\,(1-2^{n+1})}$$

ب/ كتابة بدلالة n الجداء P_n : [0.25ن]

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n = e^{w_0} \times e^{w_1} \times \ldots \times e^{w_n} = e^{w_0+w_1+\cdots+w_n} = e^{S_n} = e^{\ln(2)(1-2^{n+1})}$$
$$= \boxed{2^{(1-2^{n+1})}}$$

◆ التمرين الرابع: (07.5 نقاط)

(I

1 دراسة اتجاه تغير الدالة g، وتشكيل جدول تغيراتها: [01ن]

- النهايات:

- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(e^{-x}e^2 - xe^{-x}e^2 + 1) = 1$
- $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

- المشتقة:

$$g'(x) = -e^{2-x} - (1-x)e^{2-x} = (x-2)e^{2-x}$$

لدينا: $e^{2-x} > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $x-2$:

$$x-2=0 \Longrightarrow x=2$$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ 1

2 تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإنّ $g(x) \geq 0$: [0.5ن]

من جدول تغيرات الدالة g نجد أنّ $g(x) \geq 0$ (لأنّ الدالة g تبلغ قيمة حدية دنيا موجبة)

(II

1 حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$: [0.5ن]

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x-2-(-x)e^{-x}e^2) = \boxed{+\infty}$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$

2 أ/ حساب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)]$: [0.5ن]

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)] = \lim_{x\to+\infty}[xe^{2-x}] = \lim_{x\to+\infty}[-(-x)e^{-x}e^2] = 0$$

• نستنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $y=x+2$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ): [0.5ن]

$$f(x)-(x+2) = xe^{2-x}$$

لدينا: $e^{2-x} > 0$ إذن إشارة الفرق من إشارة x:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]-\infty; 0[$
- (C_f) يقطع (Δ) لما $x = 0$
- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]0; +\infty[$

❸ أ/ تبيين أنه من اجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا: $f'(x) = g(x)$: [0.5ن]

$$f'(x) = 1 + e^{2-x} - xe^{2-x} = (1-x)e^{2-x} + 1 = g(x)$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها: [0.5ن]

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ومنه:

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

❹ تبيين أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0.31; 0.32[$: [0.5ن]

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$

ولدينا: $f(0.31) \times f(0.32) < 0$ لأنّ: $f(0.31) \approx -0.01$ و $f(0.32) \approx 0.04$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0.31; 0.32[$

❺ تبيين (C_f) يقبل نقطة إنعطاف : [0.5ن]

لدينا: $f'(x) = g(x)$

ومنه: $f''(x) = g'(x)$

إذن إشارة $f''(x)$ من إشارة $g'(x)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

المشتقة الثانية تنعدم عند $x = 2$ وتغير إشارتها

إذن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف $\Omega(2; f(2))$ أي: $\boxed{\Omega(2;2)}$

❻ تبيين أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) : [0.5ن]

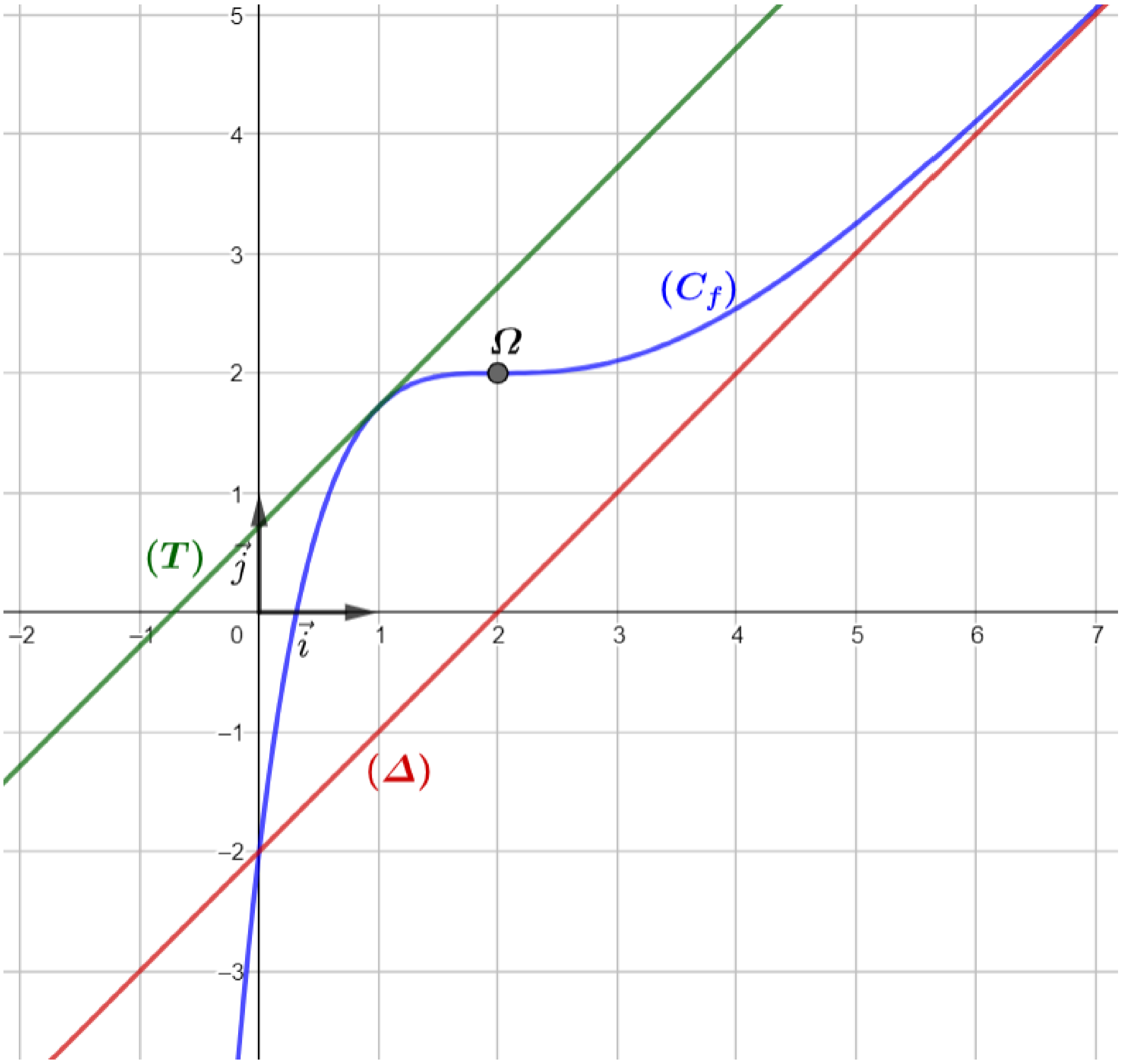
$$f'(a) = 1 \Longrightarrow (1-a)e^{2-a} + 1 = 1 \Longrightarrow (1-a)e^{2-a} = 0 \Longrightarrow 1 - a = 0 \Longrightarrow \boxed{a = 1}$$

إذن (C_f) يقبل مماسا موازيا لـ (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$

- كتابة معادلة (T): [0.5ن]

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1) = \boxed{x + e - 2}$$

❼ رسم (T)، (Δ) و (C_f): [01ن]



[0.5ن]

❽ المناقشة البيانية:

حلول المعادلة $f(x) = x + m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلات

$$y_m = x + m$$

وهي:

- لما $m < -2$ المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا تماما
- لما $m = -2$ المعادلة تقبل حلا معدوما
- لما $-2 < m < e - 2$ المعادلة تقبل حلين موجبين
- لما $m = e - 2$ المعادلة تقبل حلا وحيدا قيمته $x = 1$
- لما $m > e - 2$ المعادلة لا تقبل حلولا

بالتوفيق في شهادة البكالوريا

❤ لا تنسونا من صالح دعائكم ❤

الأستاذ: قويسم براهيم الخليل